2.3.11 Soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých II

Předpoklady: 2310

Pedagogická poznámka: V první části hodiny si studenti zopakují nejdůležitější metody z minulé hodiny. V druhé si pak zkusí méně časté situace při řešení soustav dvou rovnic o dvou neznámých. Pochopení těchto příkladů je důležité pro řešení obdobných situací v dalších hodinách u většího počtu rovnic a neznámých.

Př. 1: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{aligned} 3x+4y&=-6 \\ 2x-3y&=13 \end{aligned}$ sčítací metodou.

$3x+4y=-6 \quad /\cdot(-2)$

$2x-3y=13 \quad /\cdot(3)$

$-6x-8y=12$

$6x-9y=39$ (rovnice sečteme)

$0x-17y=51$

$y=-3$

Dopočteme x z druhé rovnice.

$2x-3y=2x-3(-3)=13$

$2x=4$

$x=2 \qquad\qquad K=[2;-3]$

Poznámka: Správnější zápis by vypadal asi takto:

$3x+4y=-6 \quad /\cdot(-2)$

$2x-3y=13 \quad /\cdot(3)$

$-6x-8y=12$

$6x-9y=39$ (rovnice sečteme)

$0x-17y=51$

$2x-3y=13$

$y=-3$

$2x-3y=13$ (dopočteme x z druhé rovnice…)

Př. 2: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{aligned} 3x+4y&=-6 \\ 2x-3y&=13 \end{aligned}$ dosazovací metodou.

$\begin{aligned} 3x+4y&=-6 \\ 2x-3y&=13 \end{aligned} \Rightarrow \quad 2x-3y=13 \Rightarrow x=\frac{13+3y}{2}$

Dosadíme do první rovnice: $3x+4y=-6 \Rightarrow 3\frac{13+3y}{2}+4y=-6 \quad /\cdot 2$

$3(13+3y)+8y=-12$

$$39+9y+8y=-12$$
$$17y=-51$$
$$y=-3$$

Dopočteme *x*: $x=\frac{13+3y}{2}=\frac{13+3(-3)}{2}=\frac{13-9}{2}=2$ $\qquad K=[2;-3]$

Př. 3: Najdi chybu v následujícím postupu:

Vyřeš soustavu rovnic $\begin{matrix} 3x+4y=-6 \\ 2x-3y=13 \end{matrix}$ dosazovací metodou.

$\begin{matrix} 3x+4y=-6 \\ 2x-3y=13 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad 2x-3y=13 \Rightarrow x=\frac{13+3y}{2}$

Dosadíme do druhé rovnice: $2x-3y=13 \Rightarrow 2\frac{13+3y}{2}-3y=13$

$13+3y-3y=13$

$0=0$ Platí vždy $\Rightarrow$ druhá rovnice je zbytečná, řešíme pouze jednu rovnici o dvou neznámých $\Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení. Řešení vyjádříme pomocí *x*:

$3x+4y=-6 \Rightarrow 4y=-6-3x \Rightarrow y=-\frac{6+3x}{4} \Rightarrow K=\left\{\left[x;-\frac{6+3x}{4}\right];x\in R\right\}$.

Určitě špatně. Příklad jsme již řešili, výsledek byl jiný.

Vztah pro *x* jsme vyjádřili z druhé rovnice a opět jsme ho do ní dosadili. Při tomto postupu jsme vůbec nepoužili první rovnici $\Rightarrow$ neřešili jsme zadanou soustavu, ale pouze jedinou rovnici (ze které jsme vyjadřovali výsledek).
$\Rightarrow$ Při použití dosazovací metody musíme vyjádřený vztah dosazovat vždy do jiné rovnice, než ze které jsme ho vyjadřovali.

Pedagogická poznámka: Předchozí chybu opravdu někteří studenti dělají.

Př. 4: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{matrix} 4x-3y=2 \\ 8x-6y=4 \end{matrix}$ sčítací metodou.

$$\begin{matrix} 4x-3y=2 & \\ 8x-6y=4 & /:2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 4x-3y=2 \\ 4x-3y=2 \end{matrix}$$

Rovnice odečteme, výsledek napíšeme místo druhé z nich.

$$\begin{matrix} 4x-3y=2 \\ 0x-0y=0 \end{matrix}$$

Druhá rovnice: podmínka splněna vždy, můžeme ji vynechat $\Rightarrow$ zbývá jediná rovnice o dvou neznámých $\Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení, vyjádříme je například pomocí *x*.

$4x-3y=2 \Rightarrow 3y=4x-2 \Rightarrow y=\frac{4x-2}{3}$ $\qquad K=\left\{\left[x;\frac{4x-2}{3}\right];x\in R\right\}$

Poznámka: Fakt, že soustava rovnic obsahuje pouze jedinou podmínku a má nekonečně mnoho řešení, byl zřejmý ještě před sečtením rovnic – ze zápisu $\begin{matrix} 4x-3y=2 \\ 4x-3y=2 \end{matrix}$ je vidět, že obě rovnice jsou stejné, druhá neříká nic nového a je možné ji vynechat. Právě přehlednost sčítací metody s úplným zápisem všech rovnic je přes svou zdlouhavost její velkou předností.

Pedagogická poznámka: Studenti se bez problémů dopočítají k rovnici $0y = 0$. Bohužel ji nejsou schopni správně interpretovat. Trvám na tom, aby napsali množinu všech řešení. Nejčastěji se objevuje $x \in R$, $y \in R$, což je samozřejmě špatně. Nechávám studenty dosadit libovolnou dvojici čísel, soustava samozřejmě nevyjde a oni musí přemýšlet dál. Snažím se je dovést k tomu, aby si uvědomili, kolik podmínek a kolik možností volby vlastně mají a že podobné příklady už řešili.
Někteří raději zkusí spočítat následující příklad a teprve, když narazí na stejný problém, začnou jej řešit.

Př. 5: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{matrix} 4x - 3y = 2 \\ 8x - 6y = 4 \end{matrix}$ dosazovací metodou.

$$4x - 3y = 2$$
$$8x - 6y = 4$$

Vyjádříme x z první rovnice $4x = 3y + 2 \Rightarrow x = \frac{3y+2}{4}$.

Dosadíme do druhé $8x - 6y = 4 \Rightarrow 8\left(\frac{3y+2}{4}\right) - 6y = 4$.

$$\frac{24y+16}{4} - 6y = 4$$
$$24y + 16 - 24y = 16$$
$$24y - 24y = 16 - 16$$
$$0y = 0$$

Tato rovnice je splněna vždy. Neznamená to, že řešením je jakákoliv dvojice čísel z *R*. Zbývá nám první rovnice, případně vyjádření *x*, které jsme z ní odvodili. $\Rightarrow$ Řešíme jednu rovnici o dvou neznámých.
Vyjádření pomocí *y* (už máme vyjádřené):

$$4x = 3y + 2 \Rightarrow x = \frac{3y+2}{4} \Rightarrow K = \left\{\left[\frac{3y+2}{4}; y\right]; y \in R\right\}$$

Vyjádření pomocí *x* (kontrola s předchozím příkladem):

$$4x - 3y = 2 \Rightarrow 3y = 4x - 2 \Rightarrow y = \frac{4x-2}{3} \Rightarrow K = \left\{\left[x; \frac{4x-2}{3}\right]; x \in R\right\}$$

Př. 6: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{matrix} 3x - 2y = 4 \\ 6x - 4y = 3 \end{matrix}$ sčítací metodou.

$$3x - 2y = 4 \quad / \cdot 2$$
$$6x - 4y = 3$$

$$6x - 4y = 8$$
$$6x - 4y = 3$$

Rovnice odečteme, výsledek napíšeme místo druhé z nich.

$$\begin{array}{l} 6x-4y=8 \\ 0x-0y=5 \\ \hline K=\emptyset \end{array}$$

Druhá rovnice (podmínka) není splněna nikdy $\Rightarrow$ soustava nemá řešení.

Poznámka: Fakt, že soustava rovnic nemá řešení, byl zřejmý ještě před odečtením rovnic: ze zápisu $\begin{array}{l} 6x-4y=8 \\ 6x-4y=3 \end{array}$ je vidět, že obě rovnice mají stejné levé strany, ale rozdílné pravé strany. Obě rovnice tedy nemohou být v žádném případě splněny najednou (obě podmínky se navzájem vylučují) a soustava tak nemůže mít řešení.
Právě přehlednost sčítací metody s úplným zápisem všech rovnic je přes svou zdlouhavost její velkou předností.

Př. 7: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{array}{l} 3x-2y=4 \\ 6x-4y=3 \end{array}$ dosazovací metodou.

$$\begin{array}{l} 3x-2y=4 \\ 6x-4y=3 \end{array}$$

Vyjádříme x z první rovnice: $3x-2y=4 \Rightarrow 3x=2y+4 \Rightarrow x=\frac{2y+4}{3}$.

Dosadíme do druhé: $6x-4y=3 \Rightarrow 6\frac{2y+4}{3}-4y=3$.

$4y+8-4y=3$

$8\neq 3$

Tato rovnice není splněna nikdy. Soustava nemá řešení. $\Rightarrow$ $K=\emptyset$

Př. 8: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{array}{r} 7x-2y=4x+2(y-2) \\ 6(x-3)+4y=3x-2(x-y) \end{array}$ libovolnou metodou.

Nejdříve soustavu upravíme.

$$\begin{array}{l} \quad 7x-2y=4x+2y-4 \\ 6x-18+4y=3x-2x+2y \\ \hline 3x-4y=-4 \\ 5x+2y=18 \\ \hline \end{array}$$

Použijeme například srovnávací metodu.

$$\begin{array}{l} 3x+4=4y \\ \quad 2y=18-5x \\ \hline 2y=\frac{3}{2}x+2 \\ 2y=18-5x \\ \hline \frac{3}{2}x+2=18-5x \quad /\cdot 2' \\ 3x+4=36-10x \\ 13x=32 \end{array}$$

$x = \frac{32}{13}$

Dopočítáme *y*.

$2y = \frac{3}{2}x + 2 = \frac{3}{2}\frac{32}{13} + 2 = \frac{3 \cdot 16}{13} + \frac{26}{13} = \frac{74}{13}$

$y = \frac{74}{26} = \frac{37}{13}$ $K = \left[\frac{32}{13}; \frac{37}{13}\right]$

Pedagogická poznámka: Příklad je samozřejmě možné řešit i dosazovací nebo sčítací metodou. „Ošklivé“ řešení je záměrné, aby studenti neměli pocit, že vždycky vycházejí pouze celá čísla.

Př. 9: Petáková:
strana 16/cvičení 30 d) f)
strana 17/cvičení 33 a)

Shrnutí: Při řešení soustav dvou rovnic o dvou neznámých se může stát, že obě rovnice soustavy představují stejnou podmínku (a soustava pak má nekonečně mnoho řešení) nebo představují navzájem se vylučující podmínky (a soustava pak nemá žádné řešení).